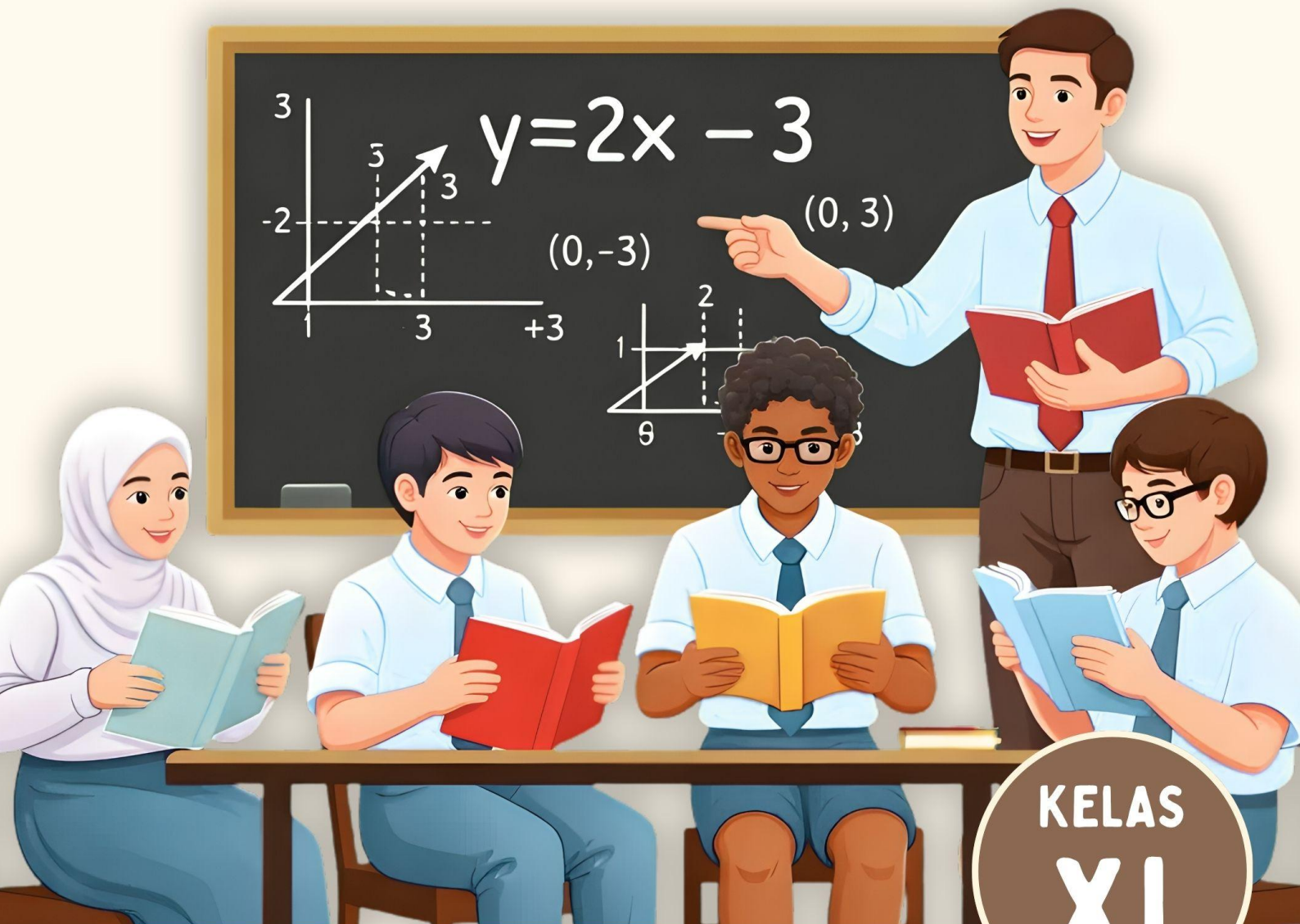


MODUL PEMBELAJARAN PROGRAM LINEAR

PEMECAHAN MASALAH



KELAS
XI

DAFTAR ISI

Daftar Isi	i
Tujuan Pembelajaran.....	ii
Petunjuk Penggunaan Modul.....	iii
Peta Konsep.....	iii
Pengantar Modul.....	1
A. Pertidaksamaan Linear Dua Variabel	2
B. Daerah Himpunan Penyelesaian (DHP).....	2
1. Ubah Pertidaksamaan menjadi Persamaan Garis Batas	2
2. Tentukan Titik Potong Garis dengan Sumbu	3
3. Gambar Jenis Garis Batas dengan Tepat	3
4. Pilih Satu Titik Uji	3
5. Tentukan Sisi Daerah yang Memenuhi	3
6. Ambil Irisan Jika terdiri atas beberapa Pertidaksamaan.....	3
7. Perhatikan Syarat $x \geq 0$ dan $y \geq 0$	3
C. Eliminasi	4
D. Substitusi.....	5
E. Latihan Soal dan Penyelesaian.....	6
F. Quiz	10
G. Ringkasan Materi	13

TUJUAN PEMBELAJARAN

Setelah mempelajari modul ini, peserta didik diharapkan mampu:

- Memahami pertidaksamaan linear dua variable.
- Menentukan garis batas dan daerah himpunan penyelesaian.
- Menggunakan metode eliminasi dan substitusi untuk mencari titik potong.
- Menentukan titik pojok dari daerah himpunan penyelesaian.
- Menyelesaikan soal cerita dan soal grafik yang berkaitan dengan materi.



Petunjuk Penggunaan Modul

Cara menggunakan modul ini

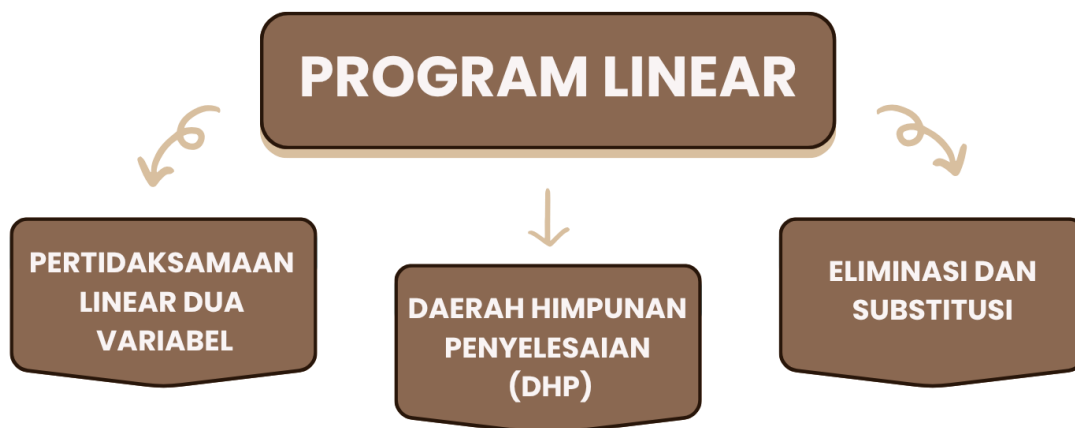
- ✓ Bacalah peta konsep dan pengantar terlebih dahulu agar memperoleh gambaran umum materi yang akan dipelajari.
- ✓ Pelajari materi inti secara berurutan supaya pemahaman terbentuk dengan runtut.
- ✓ Cermati contoh soal beserta penyelesaiannya untuk memahami penerapan konsep.
- ✓ Kerjakan kuis secara mandiri untuk mengukur tingkat pemahaman terhadap materi.
- ✓ Gunakan video pembelajaran yang terhubung melalui QR code sebagai sumber belajar pendukung.



Scan QR untuk Video Pendukung
atau klik link dibawah ini
<https://youtu.be/tI2ksNMyso0>

Peta Konsep

Peta konsep berikut menunjukkan susunan gagasan yang dipelajari pada Modul.



Pengantar Modul

Dalam kehidupan sehari-hari, kita sering menghadapi keadaan yang memiliki batasan tertentu. Misalnya, jumlah bahan yang tersedia terbatas, waktu kegiatan terbatas, atau banyaknya barang yang dapat dibuat juga terbatas. Pada modul sebelumnya, keadaan seperti itu telah dinyatakan ke dalam bentuk model matematika. Namun, muncul pertanyaan baru: bagaimana mengetahui pasangan nilai yang memenuhi semua syarat tersebut?.



Perhatikan contoh sederhana berikut. Sebuah sanggar seni tradisional sedang menyiapkan dua jenis pertunjukan tari daerah. Banyak pertunjukan tari pertama dinyatakan dengan x , sedangkan banyak pertunjukan tari kedua dinyatakan dengan y . Dari waktu latihan dan perlengkapan yang tersedia, diperoleh beberapa pertidaksamaan. Apakah semua pasangan (x,y) dapat memenuhi pertidaksamaan itu? Tentu tidak. Hanya pasangan nilai tertentu yang sesuai. Pasangan-pasangan nilai itulah yang membentuk daerah himpunan penyelesaian.

Agar lebih mudah dipahami, pertidaksamaan tersebut dapat digambarkan pada bidang koordinat. Setiap pertidaksamaan memiliki garis batas, lalu dari garis itu dapat ditentukan daerah yang memenuhi syarat. Maka bentuk matematika yang semula hanya berupa simbol dapat terlihat lebih jelas. Daerah penyelesaian membantu kita mengetahui bagian mana yang benar-benar sesuai dengan semua ketentuan yang diberikan. Selain melalui grafik, titik potong dua garis batas juga dapat ditentukan dengan cara aljabar, yaitu menggunakan metode eliminasi dan substitusi. Kedua metode ini penting untuk menemukan titik pertemuan garis secara tepat. Titik-titik tersebut kemudian membantu dalam menentukan bentuk daerah himpunan penyelesaian dan titik-titik pojoknya.

Kata Kunci

Pertidaksamaan linear dua variable; daerah himpunan penyelesaian; eliminasi; substitusi; titik pojok.

A. Pertidaksamaan Linear Dua Variabel

Pertidaksamaan linear dua variabel adalah kalimat matematika yang memuat dua variabel, misalnya x dan y , serta menggunakan tanda pertidaksamaan seperti $<$, $>$, \leq , atau \geq . Bentuk ini disebut linear karena variabelnya muncul dalam bentuk sederhana, misalnya x dan y , bukan x^2 , xy , atau bentuk akar. Dalam materi program linear, bentuk seperti $x + 2y > 6$ atau $x - y \leq 6$ termasuk pertidaksamaan linear dua variabel. Secara umum, pertidaksamaan linear dua variabel dapat ditulis dalam bentuk:

$$ax + by < c, ax + by > c, ax + by \leq c, \text{ atau } ax + by \geq c$$

dengan a , b , dan c adalah bilangan real, sedangkan x dan y adalah variabel. Bentuk ini menunjukkan bahwa nilai x dan y tidak dicari satu pasangan saja, melainkan semua pasangan nilai yang memenuhi pertidaksamaan tersebut. Hasil dari pertidaksamaan linear dua variabel biasanya berupa himpunan penyelesaian, bukan hanya satu titik.

Pertidaksamaan linear dua variabel digunakan untuk menyatakan batasan, misalnya waktu latihan tidak lebih dari jumlah tertentu, bahan baku tidak melebihi persediaan, atau jumlah peserta paling sedikit harus memenuhi ketentuan tertentu. Jadi, pertidaksamaan linear dua variabel berguna untuk menerjemahkan masalah nyata ke dalam bentuk matematika.

B. Daerah Himpunan Penyelesaian (DHP)

Daerah himpunan penyelesaian, yang sering disingkat DHP, adalah daerah pada bidang koordinat yang memuat semua pasangan nilai (x, y) yang memenuhi suatu pertidaksamaan atau sistem pertidaksamaan linear dua variabel. Jadi, jika sebuah pertidaksamaan mempunyai banyak pasangan penyelesaian, semua pasangan itu tidak ditulis satu per satu, melainkan digambarkan sebagai suatu daerah. Untuk menentukan DHP terdapat beberapa langkah, yaitu:

1. Ubah Pertidaksamaan menjadi Persamaan Garis Batas

misalnya, pertidaksamaan $x + 2y \leq 4$ diubah terlebih dahulu menjadi garis batas $x + 2y = 4$. Garis ini menjadi acuan untuk membedakan sisi yang memenuhi dan sisi yang tidak memenuhi.

2. Tentukan Titik Potong Garis dengan Sumbu

Agar garis mudah digambar, tentukan titik potongnya dengan sumbu x dan sumbu y . Pada $x + 2y = 4$, jika $y = 0$ maka $x = 4$, dan jika $x = 0$ maka $y = 2$. Dua titik ini cukup untuk menggambar garis batas.

3. Gambar Jenis Garis Batas dengan Tepat

Jika tanda pertidaksamaannya \leq atau \geq , garis batas digambar penuh karena titik-titik pada garis masih termasuk penyelesaian. Jika tandanya $<$ atau $>$, garis digambar putus-putus karena titik pada garis tidak termasuk penyelesaian.

4. Pilih Satu Titik Uji

Gunakan titik yang tidak terletak pada garis, biasanya titik $(0,0)$. Titik ini disubstitusikan ke pertidaksamaan untuk melihat apakah pertidaksamaan bernilai benar atau salah.

5. Tentukan Sisi Daerah yang Memenuhi

Jika titik uji memenuhi pertidaksamaan, maka daerah yang memuat titik itu adalah daerah penyelesaian. Jika titik uji tidak memenuhi, maka daerah penyelesaiannya berada pada sisi yang lain.

6. Ambil Irisan Jika terdiri atas beberapa Pertidaksamaan

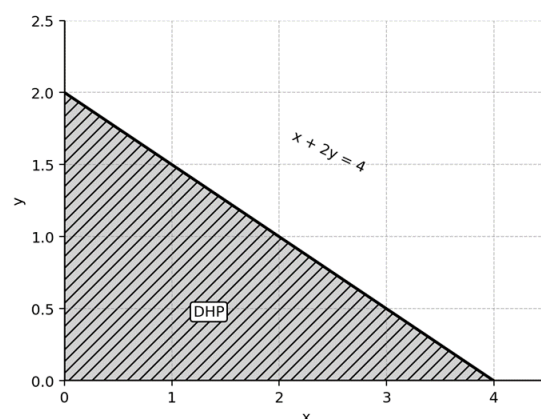
Untuk sistem pertidaksamaan, daerah himpunan penyelesaian adalah bagian yang memenuhi semua pertidaksamaan sekaligus. Jadi, yang dipilih adalah daerah perpotongan atau irisan dari semua daerah yang memenuhi.

7. Perhatikan Syarat $x \geq 0$ dan $y \geq 0$

Pada banyak soal program linear, syarat non-negatif membuat DHP berada di kuadran I. Artinya, hanya daerah dengan nilai x dan y tidak negatif yang dipertimbangkan.

Contoh Grafik

Perhatikan pertidaksamaan $x + 2y \leq 4$ dengan syarat $x \geq 0$ dan $y \geq 0$. Daerah yang diarsir pada grafik berikut merupakan DHP dari pertidaksamaan tersebut.



C. Eliminasi

Metode eliminasi adalah cara menyelesaikan sistem persamaan linear dua variabel dengan menghilangkan salah satu variabel. Setelah satu variabel hilang, nilai variabel yang lain dapat ditentukan dengan lebih mudah. Eliminasi sering dipakai untuk mencari titik potong dua garis batas. Karena titik potong merupakan pasangan nilai yang memenuhi dua persamaan sekaligus, maka kedua persamaan dapat diselesaikan sebagai sistem persamaan linear dua variabel. Langkah-langkah metode eliminasi, yaitu:

1. Tuliskan dua persamaan garis batas. Pertidaksamaan terlebih dahulu diubah menjadi persamaan agar titik potongnya dapat dicari.
2. Samakan koefisien salah satu variabel. Jika koefisien belum sama, salah satu atau kedua persamaan dapat dikalikan dengan bilangan tertentu.
3. Eliminasi salah satu variabel. Jumlahkan atau kurangkan kedua persamaan sehingga salah satu variabel hilang.
4. Tentukan nilai variabel yang tersisa. Setelah satu variabel diperoleh, substitusikan kembali ke salah satu persamaan untuk mencari variabel yang lain.
5. Tuliskan pasangan penyelesaiannya. Pasangan nilai itulah yang menjadi titik potong kedua garis.

Contoh

Tentukan titik potong garis $2x + y = 8$ dan $x + y = 5$ dengan metode eliminasi.

Langkah	Uraian
1	Tuliskan kedua persamaan: $2x + y = 8$ $x + y = 5$
2	Kurangkan persamaan pertama dengan persamaan kedua: $(2x + y) - (x + y) = 8 - 5$
3	Diperoleh: $x = 3$
4	Substitusikan $x = 3$ ke salah satu persamaan, misalnya $x + y = 5$: $3 + y = 5$
5	Diperoleh $y = 2$, sehingga titik potong kedua garis adalah $(3, 2)$.

D. Substitusi

Metode substitusi adalah cara menyelesaikan sistem persamaan linear dua variabel dengan mengganti satu variabel menggunakan bentuk yang diperoleh dari persamaan lain. Metode ini cocok digunakan ketika salah satu persamaan mudah diubah menjadi bentuk x atau y . Substitusi juga dipakai untuk menentukan titik potong dua garis batas. Dengan metode ini, satu persamaan diubah lebih dahulu, kemudian hasilnya dimasukkan ke persamaan yang lain hingga diperoleh pasangan penyelesaian. Langkah-langkah metode substitusi, yaitu:

1. Tuliskan dua persamaan garis batas. Seperti pada eliminasi, pertidaksamaan diubah terlebih dahulu menjadi persamaan.
2. Nyatakan salah satu variabel dalam bentuk variabel yang lain. Pilih persamaan yang paling mudah diubah, misalnya $y = 5 - x$.
3. Substitusikan ke persamaan kedua. Bentuk variabel yang sudah diperoleh dimasukkan ke persamaan lain.
4. Selesaikan persamaan yang terbentuk. Dari sini diperoleh nilai salah satu variabel.
5. Cari variabel yang lain dan tuliskan pasangan penyelesaiannya. Pasangan nilai tersebut merupakan titik potong kedua garis.

Contoh

Tentukan titik potong garis $x + 2y = 10$ dan $x + y = 6$ dengan metode substitusi.

Langkah	Uraian
1	Tuliskan kedua persamaan: $x + 2y = 10$ $x + y = 6$
2	Dari persamaan kedua diperoleh: $x = 6 - y$
3	Substitusikan ke persamaan pertama: $(6 - y) + 2y = 10$
4	Diperoleh: $6 + y = 10$ $y = 4$

5	Substitusikan $y = 4$ ke $x + y = 6$: $x + 4 = 6$ $x = 2$ Jadi titik potong kedua garis adalah $(2, 4)$.
---	---

E. Latihan Soal dan Penyelesaian

Latihan Soal 1

Sebuah sanggar seni tradisional akan menampilkan dua jenis tari daerah, yaitu Tari A dan Tari B. Setiap penampilan Tari A memerlukan 2 jam latihan dan 3 set properti. Setiap penampilan Tari B memerlukan 1 jam latihan dan 2 set properti. Waktu latihan yang tersedia paling banyak 10 jam dan properti yang tersedia paling banyak 14 set. Jika banyak penampilan Tari A dinyatakan dengan x dan banyak penampilan Tari B dinyatakan dengan y , maka model matematika yang tepat adalah

- $2x + y \leq 10, 3x + 2y \leq 14, x \geq 0, y \geq 0$
- $2x + y \geq 10, 3x + 2y \geq 14, x \geq 0, y \geq 0$
- $x + 2y \leq 10, 2x + 3y \leq 14, x \geq 0, y \geq 0$
- $2x + y = 10, 3x + 2y = 14, x \geq 0, y \geq 0$
- $3x + 2y \leq 10, 2x + y \leq 14, x \geq 0, y \geq 0$

Penyelesaian

Keterangan	Tari A	Tari B	Maksimum	Model Matematika
Banyak penampilan	x	y	-	-
Waktu latihan	2	1	10	$2x + y \leq 10$
Properti	3	2	14	$3x + 2y \leq 14$

Syarat non-negatif: $x \geq 0$ dan $y \geq 0$.

Jadi model matematika yang tepat adalah $2x + y \leq 10, 3x + 2y \leq 14, x \geq 0, y \geq 0$.

Jawaban: a

Latihan Soal 2

Dalam sebuah festival budaya, jumlah peserta Tari Saman dinyatakan dengan x dan jumlah peserta Tari Piring dinyatakan dengan y . Banyak peserta memenuhi dua syarat berikut: $2x + y = 17$ dan $x + y = 11$. Titik potong kedua garis tersebut adalah

- $(5, 6)$
- $(6, 5)$
- $(7, 4)$

d. (4, 7)

e. (8, 3)

Penyelesaian

Gunakan metode eliminasi.

Kurangkan persamaan pertama dengan persamaan kedua:

$$(2x + y) - (x + y) = 17 - 11$$

$$x = 6$$

Substitusikan nilai x ke salah satu persamaan, misalnya:

$$x + y = 11$$

$$6 + y = 11$$

$$y = 5$$

Jadi, titik potongnya adalah (6, 5)

Jawaban: b**Latihan Soal 3**

Seorang pengrajin membuat dua jenis suvenir budaya, yaitu miniatur rumah adat dan topeng kayu. Model matematika yang diperoleh adalah $x + y \leq 8$, $x \leq 5$, $x \geq 0$, dan $y \geq 0$.

Titik-titik pojok daerah himpunan penyelesaian adalah

a. (0,0), (5,0), (5,3), (0,8)

b. (0,0), (8,0), (5,3), (0,5)

c. (0,0), (5,0), (8,0), (0,8)

d. (0,0), (3,5), (5,8), (0,8)

e. (0,0), (5,0), (5,8), (0,3)

Penyelesaian

Garis utama:

$$x + y = 8$$

$$\text{Jika } x = 0 \rightarrow y = 8 \rightarrow (0, 8)$$

$$\text{Jika } y = 0 \rightarrow x = 8 \rightarrow (8, 0)$$

Namun karena ada syarat $x \leq 5$, maka titik (8, 0) tidak memenuhi. Batas pada sumbu x hanya sampai (5, 0).

Garis batas lainnya adalah $x = 5$.Cari titik potong dengan $x + y = 8$:

$$5 + y = 8$$

$$y = 3 \rightarrow (5, 3)$$

Titik pada sumbu:

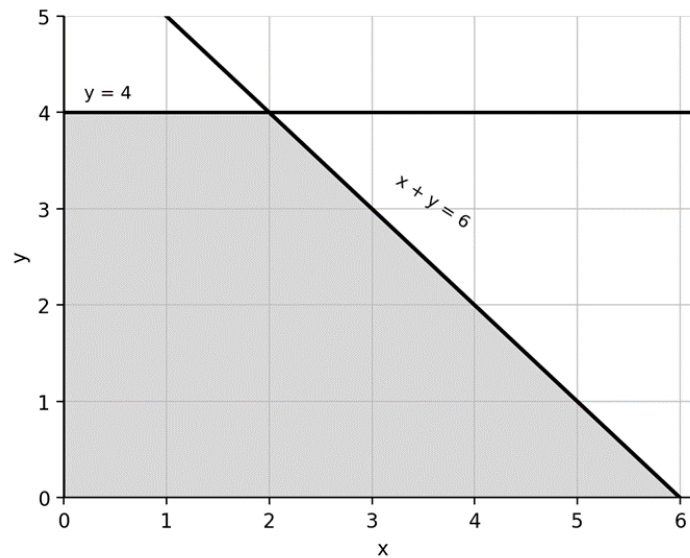
(0,0) dan (5,0)

Sehingga titik-titik pojok daerah penyelesaian adalah: $(0,0)$, $(5,0)$, $(5,3)$, dan $(0,8)$

Jawaban: a

Latihan Soal 4

Perhatikan grafik berikut. Sistem pertidaksamaan yang sesuai dengan daerah arsiran adalah



- a. $x + y \leq 6, y \leq 4, x \geq 0, y \geq 0$
- b. $x + y \geq 6, y \leq 4, x \geq 0, y \geq 0$
- c. $x + y \leq 6, y \geq 4, x \geq 0, y \geq 0$
- d. $x + y \geq 6, y \geq 4, x \geq 0, y \geq 0$
- e. $x + y \leq 4, y \leq 6, x \geq 0, y \geq 0$

Penyelesaian

Garis miring melalui titik $(0,6)$ dan $(6,0)$, sehingga persamaan garisnya adalah:

$$x + y = 6$$

Karena daerah arsiran berada di bawah garis, maka pertidaksamaannya:

$$x + y \leq 6$$

Garis horizontal pada $y = 4$

Karena daerah arsiran berada di bawah garis tersebut, maka:

$$y \leq 4$$

Daerah berada di kuadran I, sehingga:

$$x \geq 0$$

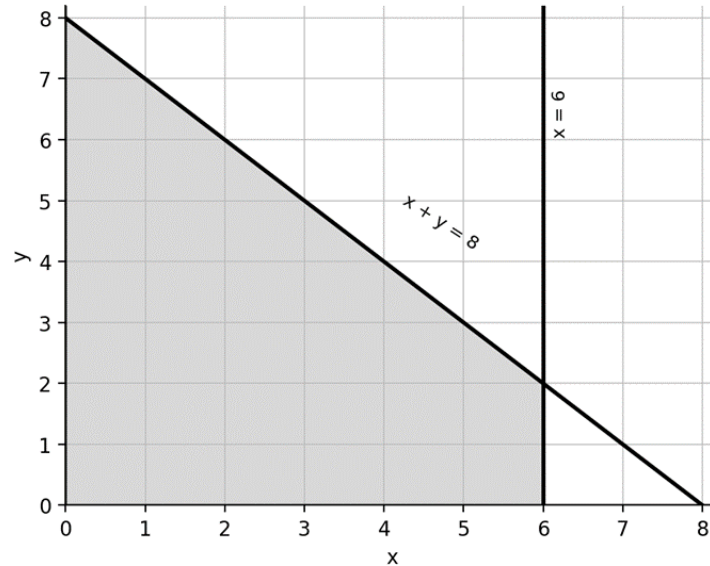
$$y \geq 0$$

Jadi, sistem pertidaksamaan yang sesuai adalah: $x + y \leq 6, y \leq 4, x \geq 0, y \geq 0$

Jawaban: a

Latihan Soal 5

Perhatikan grafik berikut. Titik pojok yang berada pada perpotongan garis $x = 6$ dan $x + y = 8$ adalah



- a. (2, 6)
- b. (6, 2)
- c. (8, 6)
- d. (6, 8)
- e. (4, 4)

Penyelesaian

Diketahui dua garis:

$$x = 6$$

$$x + y = 8$$

Untuk mencari titik potong, substitusikan nilai $x = 6$ ke persamaan kedua:

$$x + y = 8$$

$$6 + y = 8$$

$$y = 8 - 6$$

$$y = 2$$

Jadi titik potongnya adalah: (6, 2)

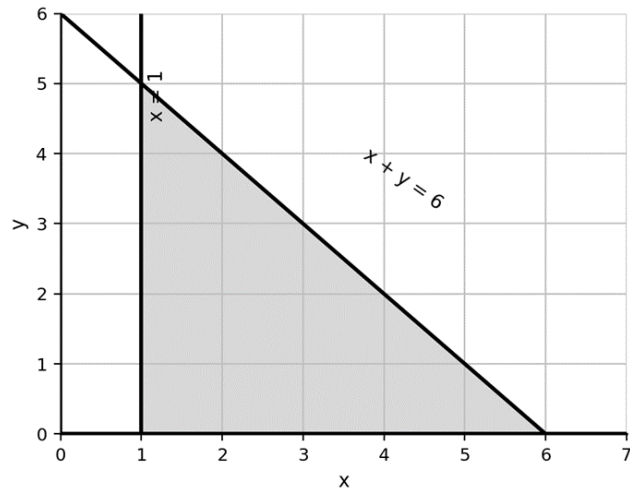
Jawaban: b

F. Quiz

Ayo uji pemahamanmu!

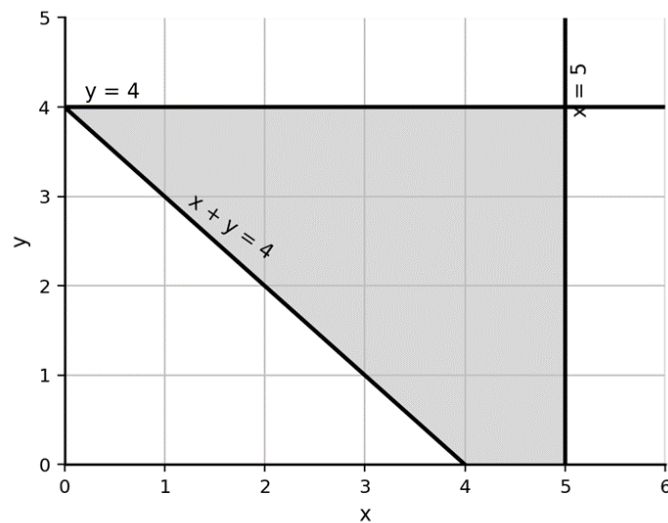
Kerjakan soal-soal berikut dengan teliti. Gunakan pemahamanmu dan pilih satu jawaban yang paling tepat pada setiap soal.

- Bentuk di bawah ini yang merupakan pertidaksamaan linear dua variabel adalah
 - $2x + y \leq 10$
 - $x^2 + y = 7$
 - $xy + 3 = 9$
 - $\sqrt{x} + y = 5$
 - $\frac{1}{x} + y = 4$
- Dalam suatu sanggar tari, latihan tari Saman memerlukan 3 jam dan latihan tari Piring memerlukan 2 jam. Waktu latihan yang tersedia paling banyak 18 jam. Jika banyak latihan tari Saman dinyatakan dengan x dan tari Piring dinyatakan dengan y , maka pertidaksamaan yang tepat adalah
 - $3x + 2y \geq 18$
 - $3x + 2y \leq 18$
 - $2x + 3y \leq 18$
 - $x + y \leq 18$
 - $3x + y \leq 18$
- Pasangan nilai yang memenuhi sistem pertidaksamaan $x + y \leq 7$, $x \geq 2$, dan $y \geq 1$ adalah
 - (1, 4)
 - (2, 6)
 - (3, 3)
 - (4, 4)
 - (0, 5)
- Titik potong dua garis $2x + y = 8$ dan $x + y = 5$ adalah
 - (2, 3)
 - (3, 2)
 - (4, 1)
 - (5, 0)
 - (1, 4)
- Perhatikan grafik berikut. Sistem pertidaksamaan yang sesuai dengan daerah arsiran adalah



- a. $x + y \leq 6, x \geq 1, y \geq 0$
- b. $x + y \geq 6, x \geq 1, y \geq 0$
- c. $x + y \leq 6, x \leq 1, y \geq 0$
- d. $x + y \geq 6, x \leq 1, y \geq 0$
- e. $x + y \leq 6, x \geq 0, y \leq 1$

6. Dari grafik berikut, titik pojok yang terletak paling kanan bawah pada daerah arsiran adalah



- a. (0, 4)
- b. (4, 0)
- c. (5, 0)
- d. (5, 4)
- e. (4, 4)

7. Titik potong dua garis $x + y = 9$ dan $y = 2x - 3$ adalah

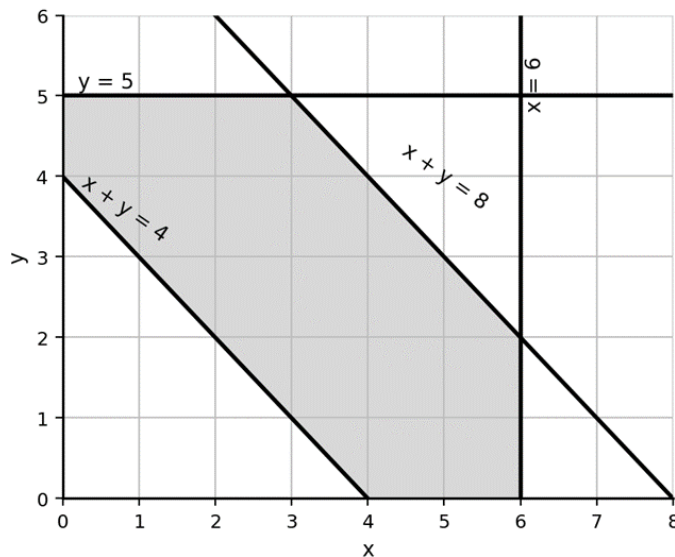
- a. (3, 6)
- b. (4, 5)

- c. (5, 4)
- d. (2, 5)
- e. (6, 3)

8. Dalam menggambar daerah himpunan penyelesaian, jika pertidaksamaan berbentuk $x + y < 6$, maka garis batas $x + y = 6$ digambar

- a. tebal
- b. berwarna
- c. putus-putus
- d. penuh
- e. ganda

9. Perhatikan grafik berikut. Titik yang termasuk daerah arsiran adalah



- a. (7, 1)
- b. (6, 3)
- c. (1, 5)
- d. (2, 2)
- e. (0, 3)

10. Langkah yang tepat setelah menggambar garis batas suatu pertidaksamaan adalah ...

- a. langsung mencari nilai maksimum
- b. melakukan eliminasi untuk semua garis
- c. menentukan daerah yang memenuhi dengan uji titik
- d. menentukan keuntungan total
- e. menghapus garis yang tidak diperlukan

G. Ringkasan Materi

1. Pertidaksamaan linear dua variabel memuat dua variabel dan tanda pertidaksamaan.
2. Setiap pertidaksamaan memiliki garis batas dan daerah penyelesaian.
3. DHP adalah daerah yang memenuhi semua syarat pada pertidaksamaan.
4. Eliminasi dan substitusi digunakan untuk menentukan titik potong dua garis.
5. Titik potong dan titik pojok penting dalam pembahasan program linear.

